$M \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\qquad$ $\det(M) = \det({}^T M)$

M invertibile $\iff$ $\det(M) \neq 0$

$\iff$ $\operatorname{rk}(M) = n$

$\iff$ le colonne di M sono una base di $\mathbb{K}^n$

$\iff$ le righe di M sono una base di $\mathbb{K}^n$

⚠ Il determinante è definito solo per matrici $n \times n$

Il rango ha un senso per matrici $m \times n$ anche con $m \neq n$.

Def: Sia $M \in \mathbb{K}^{m,n}$; un **minore (quadrato)** di M è una sottomatrice di M ottenuta cancellando $m-k$ righe e $n-k$ colonne da M. k è detto **ordine** del minore.

Un minore quadrato S di M è detto **singolare** se $\det(S)=0$; **non singolare** se $\det(S)\neq 0$.

Teorema di Kronecker: Sia $M \in \mathbb{K}^{m,n}$.
Allora il rango di M = $\dim_{\mathbb{K}}(C_M)$ coincide con l'ordine massimo di un minore non singolare

contenuto in M e questo coincide anche con la dimensione $\dim \mathcal{L}(R_M)$ dello spazio vettoriale generato dalle righe di M.

$$\dim \mathcal{L}(C_M) = rk(M) = \rho(M) = \dim \mathcal{L}(R_M)$$

Oss: $\rho(M) = \rho({}^TM)$ in quanto l'ordine massimo di un minore non singolare contenuto in M è lo stesso dell'ordine massimo di un minore non singolare contenuto in ${}^TM$ $\Rightarrow$ visto che $\det(S) = \det({}^TS)$.

In particolare se $\dim \mathcal{L}(C_M) = rk(M) = \rho(M)$

$$\Rightarrow \rho(M) = \rho({}^TM) = \dim \mathcal{L}(C_{TM}) = \dim \mathcal{L}(R_M)$$ ∎

Lemma: Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \in \mathbb{K}^m$ dei vettori colonna.
Allora $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ è una sequenza libera $\Leftrightarrow$
la matrice M che ha come colonne $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$
contiene un minore S $k \times k$ con $\det(S) \neq 0$.

$\bar{v}_1 = {}^T(v_{11} \dots v_{1m})$ $\bar{v}_2 = {}^T(v_{21} \dots v_{2m}) \dots$

$\bar{v}_k = {}^T(v_{k1} \dots v_{km})$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} v_{11} & v_{21} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ v_{1m} & v_{2m} & \end{matrix}} & & v_{k1} \\ & & \vdots \\ & & v_{km} \end{bmatrix}$$

DIM: Se $k > m \Rightarrow$ la matrice non contiene minori $k \times k$ e i vettori sono legati $\Rightarrow$ FINE.

Se $k = m \Rightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ base e dunque liberi.

Se $k < m \rightarrow$ se $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ è legata $\Rightarrow$ uno dei vettori è c.lineare degli altri $\Rightarrow$ in particolare anche il ogni sottovettore ottenuto da uno dopo cancellando $m-k$ righe è c.lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ ogni sottomatrice $k \times k$ ha $\det = 0$

→ supponiamo ora $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ libera }

⇒ possiamo completare $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ a base di $\mathbb{K}^m$ aggiungendo $m-k$ vettori della base canonica.

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m \; \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{m-k}})$ base di $\mathbb{K}^m$

⇒

$M' =$

v_{11}	v_{21}	...	$\bar{v}_k$	...	
⋮	⋮		0		
			1		
v_{1m}	v_{2m}	...	⋮		
			0		
↑ $\bar{v}_1$	↑ $\bar{v}_2$	...	↑ $\bar{v}_k$	↑ $\bar{e}_{i_1}$ ...	↑ $\bar{e}_{i_{m-k}}$

è una matrice con tutte le colonne indip e corrispondente ad una base di $\mathbb{K}^m$

⇒ $\det(M') \neq 0$

SCRIVIAMO DET M' usando la formula di LAPLACE a partire dall'ultima colonna

[in ognuna delle colonne aggiunte c'è una unica entrata $\neq 0$] $\Rightarrow$ usando Laplace vediamo che

$$\det M' = \pm \det\left(M'_{i_{m-k},m}\right) = \pm \det\left(M_{i_{m-k},m}\right)_{i_{m-k-1},m-1}$$

$$= \ldots = \pm \det(S)$$

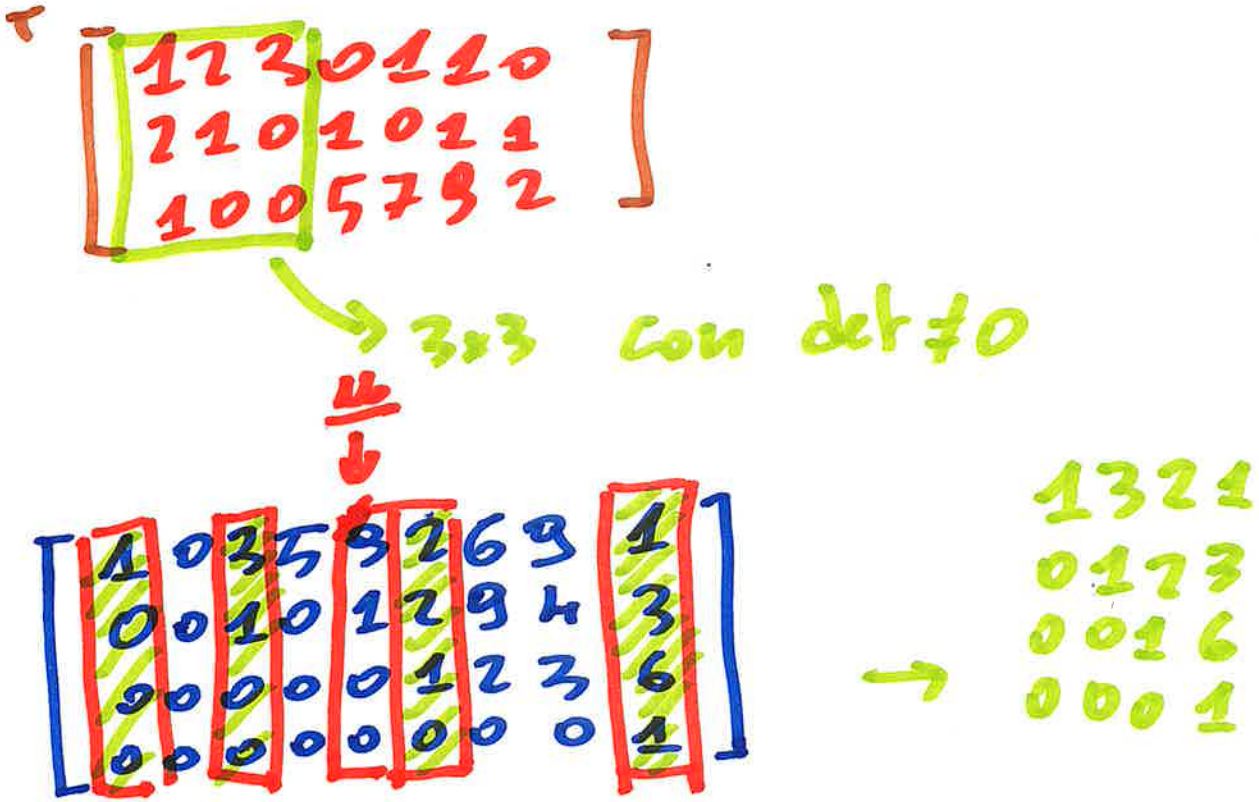
(0 *)

dove S sottomatrice di M in cui si sono cancellate le righe $i_1, i_2 \ldots, i_{m-k}$

↑ dopo aver cancellato le ultime $m-k$ colonne e corrispondenti righe

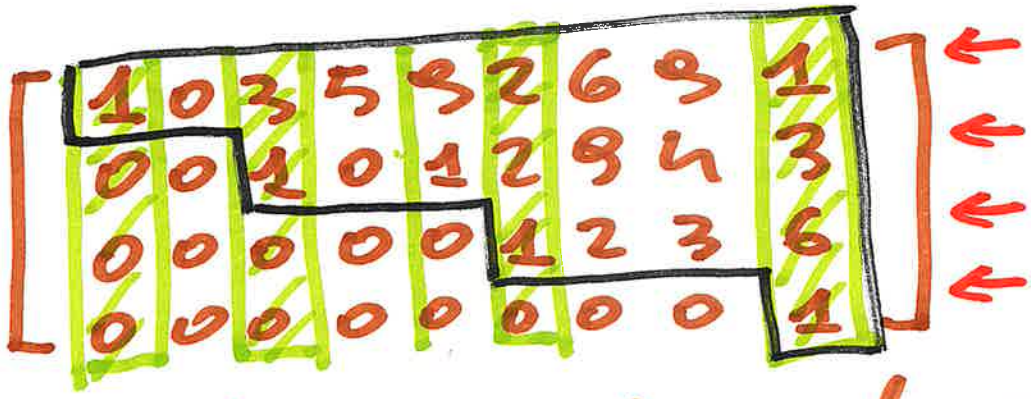
$\Rightarrow \det(S) \neq 0 \Rightarrow M$ contiene un minore $k \times k$ con

determinante non nullo □



una matrice di questo tipo è detta "a scalini" e gode della proprietà che in ogni riga (tranne la prima eventuale) è 0

è più a destra della prima entrata 0 di ognuna delle righe superiori.



Una matrice a scalini che non contiene il vettor nullo ha come righe vettori indipendenti!

Dim (teorema)

poniamo $rk(M) := \dim \mathcal{L}(C_M)$

$$\rho(M) := \max\{k : \exists \text{ un minore } S : k \times k \text{ di } M \text{ con } \det(S) \neq 0\}.$$

oss: Se $\rho(M) = 0 \Rightarrow M \equiv \underline{0} \Rightarrow \dim \mathcal{L}(C_M) = 0$.

Supponiamo

$rk(M) \not\leq \rho(M)$ perché sia $rk(M) = k$

$\Rightarrow$ esistono k ~~righe~~ colonne in M linear. indipendenti $\Rightarrow$ la sottomatrice di M formata da queste k colonne contiene un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$ per il lemma

$\Rightarrow \rho(M) \geq k \Rightarrow rk(M) \leq \rho(M)$

supponiamo ora $\rho(M) > rk(M) = k$

$\Rightarrow$ esiste in M un minore S di ordine $(k+1) \times (k+1)$ con $\det(S) \neq 0 \Rightarrow$ le colonne intercettate da S sono per il lemma un sistema libero $\Rightarrow \dim \mathcal{L}(C_M) \geq k+1$

$\Rightarrow$ perché $rk(M) = k = \dim \mathcal{L}(C_M) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(M) \leq rk(M) \Rightarrow$

$\rho(M) = rk(M)$ □

$\rho(M) = rk(M)$ non cambia

$\rho(M) = \rho(M) \Rightarrow rk(M) = rk(M)$.

#

CALCOLO RANGO: data $M \in \mathbb{K}^{m,n}$

1) per ogni $i = 1 \dots \min(m,n)$

se $\forall$ minore di ordine i ha $\det = 0$ → restituire $i-1$

~~continuare~~ continuare

altrimenti: restituire $\min(m,n)$.

OSS 1) Se ogni minore di ordine i ha $\det = 0$

$\Rightarrow$ anche ogni minore di ordine $j > i$ ha $\det = 0$ per il teorema di Laplace.

2) $\operatorname{rk}(M) \leq \min(m,n)$ $\quad \operatorname{rk}(M) = \dim \operatorname{Im} f_M \leq \dim(\text{Dom } f_M, \text{Cod. } f_M)$.

Quanti sono i minori $k \times k$ di una matrice $m \times n$?

DOBBIAMO SCEGLIERE k RIGHE E k COLONNE

(o equiv. $m-k$ RIGHE E $n-k$ COLONNE).

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$m=n=7 \quad k=3$

$$\binom{7}{3}^2 = \left[\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!}\right]^2 = 35^2$$

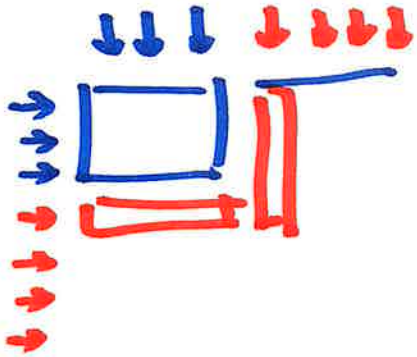
Teorema degli orlati: Una matrice $M \in \mathbb{K}^{m,n}$ ha rango $k \iff$ contiene una sottomatrice $F \in \mathbb{K}^{k,k}$ con $\det(F) \neq 0$ ed ogni minore di M che

ha ordine $(k+1)\times(k+1)$ e contiene S

ha $\det = 0$.

→ ORLATO DI S.

$m=n=7$, $k=3$



$4\times 4 = 16$ minori da considerare

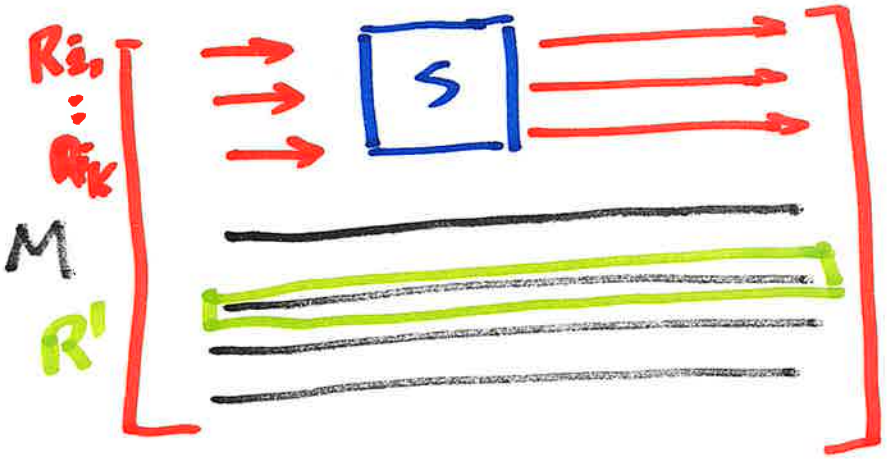
DIM: Sia $M \in \mathbb{K}^{m,n}$. Se M ha rango k allora contiene un minore S di ordine k con $\det(S)\neq 0$ e per ogni minore S' di ordine $k+1$ si ha $\det(S')=0$. Quindi anche ogni orlato di un minore $k\times k$ con $\det \neq 0$ ha determinante nullo. ($\Rightarrow$)

DIMOSTRIAMO ORA CHE SE $S \in M_{k,k}$ con $\det(S) \neq 0$ e la matrice M ha rango $\geq k+1$

$\Rightarrow$ esiste sicuramente almeno una orlata S' di S con $\det(S') \neq 0$

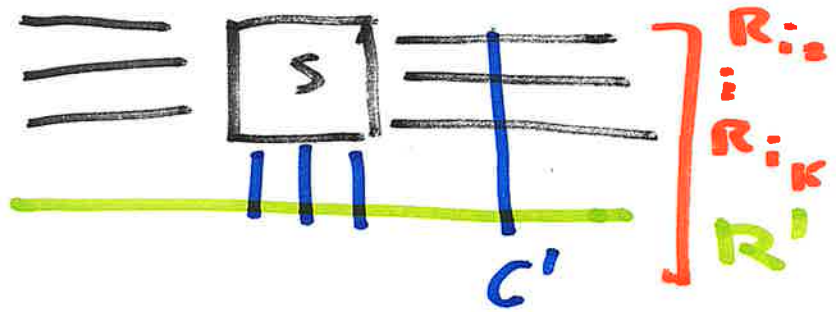
$\Rightarrow$ per la controimmagine se ogni orlata di S ha $\det = 0 \Rightarrow \operatorname{rk}(M) < k+1$ ma $\operatorname{rk}(M) \geq k \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rk}(M) = k$.



Supponiamo $\operatorname{rk}(M) \geq k+1$ le righe intercettate da S sono libere $\Rightarrow$ poiché $\operatorname{rk}(M) > k$ è sempre possibile trovare almeno un'altra riga R' in M indip. dalle righe intercettate da S.

$$M' = \begin{bmatrix} R_{i_2} \\ \vdots \\ R_{i_k} \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$



$\dim \mathcal{L}(R_{M'}) = k+1 \Rightarrow$ M' contiene un minore $(k+1)\times(k+1)$ non singolare.

A priori tale minore potrebbe non contenere S, ma adesso consideriamo lo s. vettoriale $\mathcal{L}(C_{M'})$

$\dim \mathcal{L}(C_{M'}) = \dim(\mathcal{L}(R_{M'})) = k+1$

inoltre le colonne intercettate da S sono un sistema libero $\Rightarrow \exists$ una colonna C' in M' che le completa a base.

CONSIDERIAMO ORA LA SOTTOMATRICE S' DI M'

LE CUI COLONNE SONO QUELLE DI S E C'

↓

È QUADRATA ED HA RANGO $k+1$ E CONTIENE S

$\Rightarrow \det(S') \neq 0$ E S' È UN ORLATO DI S

IN M' MA ANCHE IN M □

↓

$\exists$ UN ORLATO DI S CON DET $\neq 0$

SE $rk(M) >$ ORDINE DI S.

⚠ È FONDAMENTALE CHE SI PARTA DA S CON $\det(S) \neq 0$!!

$\det\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} = 1-4 = -3$

$$rk\begin{bmatrix}1&2&6&3&2&0\\2&1&8&7&2&0\\1&-1&2&4&0&1&0\end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}1&2&6\\2&1&8\\1&-1&2\end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&7\\1&-1&4\end{vmatrix} = 0$$

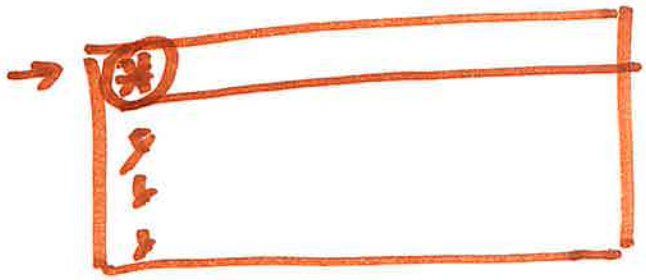
$$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&-1&0\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&0\\1&-1&0\end{vmatrix} = 0$$

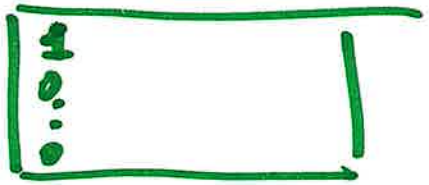
Il calcolo rango si può fare anche riducendo una matrice in forma a scalini.

$$rk(A) = \dim(\mathcal{L}(R_A))$$



1) Si riordinano i vettori di modo che il primo abbia una entrata non nulla il più a sx possibile.

2) Si sottraggono a tutti i vettori seguenti multipli del primo che annullino l'entrata nella sua posizione a sx.



3) passate al II vettore e lo sommate con entrata non nulla più a sx rispetto a i vettori rimanenti escludendo il primo.

4) annullate tutte le entrate che corrispondono alla sua entrata non nulla più a sinistra (pivot) nei vettori dopo.

→ FORMA RIDOTTA

5) iterate per ogni vettore non nullo

6) dividete ogni riga per il valore del suo pivot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 7 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 0 & 7 & 5 & 9 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 0 & 7 & 5 & 9 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

echelon form

$nk=4$

$$\begin{matrix} \underline{1} & 0 & 5 \\ 0 & \underline{1} & \end{matrix}$$